

УДК 517.9

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ МОДЕЛИ ЭРРОУ-ДЕБРЕ С ТРАНЗАКЦИОННЫМИ ИЗДЕРЖКАМИ

© А.Е. Болотин, Н.Г. Павлова

Ключевые слова: точки совпадения отображений; α -накрывающие отображения; функция спроса; функция предложения; равновесные цены.

Исследуется вопрос о существовании положения равновесия в модели Эрроу–Дебре с транзакционными издержками. В рассматриваемой модели функция спроса получена как решение задачи максимизации функции полезности, а функция предложения – как решение задачи максимизации прибыли при бюджетных ограничениях. В результате применения теорем о существовании точек совпадения α -накрывающего и липшицева отображений получены достаточные условия существования вектора равновесных цен.

Введение. В работе рассматривается модель, обобщающая модель Эрроу–Дебре, в которой учитываются транзакционные издержки производителей. Для получения достаточных условий существования положения равновесия и исследования его свойств применяются результаты работ [1–3], посвященных существованию и устойчивости точек совпадения отображений в метрических пространствах.

Будем рассматривать метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y , соответственно. Через $B_X(x, r)$ в пространстве X обозначим замкнутый шар радиуса r с центром в точке x . Аналогичное обозначение введем в пространстве Y .

О п р е д е л е н и е 1 ([1]). Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $S: X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если

$$S(B_X(r, x)) \supseteq B_Y(\alpha r, S(x)) \quad \forall r \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Для получения достаточных условий существования положения равновесия будем применять следующие результаты.

Теорема о точках совпадения ([1]). Пусть пространство X полно, а $S, D: X \rightarrow Y$ произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является α -накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что

$$S(\xi) = D(\xi), \quad \rho_X(\xi, x_0) \leq \frac{\rho_Y(S(x_0), D(x_0))}{\alpha - \beta}. \quad (6.1)$$

Теорема Милютина о возмущении ([1]). Пусть X – полное метрическое пространство, Y – нормированное пространство, отображение $S: X \rightarrow Y$ является непрерывным и α -накрывающим. Тогда для любого отображения $D: X \rightarrow Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$, отображение $S \mid D$ является $(\alpha - \beta)$ -накрывающим.

Модель поведения производителя. Функции предложения. Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, причем i -й товар для потребителя имеет цену $p_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Будем также предполагать, что цены $\vec{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n)$, по которым производитель реализует товары,

меньше цен $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, которые платит за них потребитель, причем $\hat{p} = \alpha p$, где $\alpha \in (0; 1)$.

Предположим, что технологический процесс описывается производственной функцией Кобба–Дугласа:

$$F_i(y_{-i1}, y_{-i2}, \dots, y_{-in}) = C_i \prod_{j=1}^n y_{-ij}^{\beta_{ij}}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $y_{-ij} > 0$ — объем j -й продукции, расходуемый для производства i -ой продукции $i, j = \overline{1, n}$, $C_i > 0$, $\beta_{ij} > 0$, $i, j = \overline{1, n}$ — заданные числа¹, такие, что $\sum_{j=1}^n \beta_{ij} < 1$, $i = \overline{1, n}$. Будем предполагать также, что множество имеющихся у производителя ресурсов является n -мерным параллелепипедом: $T_n = [0, b_1] \times [0, b_2] \times \dots \times [0, b_n]$, причем $b_i \geq \sum_{j=1}^n C_j^{\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \beta_{jk}}}$, $i = \overline{1, n}$. Кроме того, т. к. нас интересуют соотношения между ценами товаров, а не их абсолютное значение, то будем считать, что $p_j > \beta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Выбор производителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции прибыли:

$$\sum_{i=1}^n p_i \left(\alpha C_i \prod_{j=1}^n y_{-ij}^{\beta_{ij}} - \sum_{j=1}^n y_{-ji} \right) \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n y_{-ji} \in [0, b_i], \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.2)$$

Поскольку $\sum_{j=1}^n \beta_{ij} < 1$ для любого $i = \overline{1, n}$, то все производственные функции F_i вогнуты, и, следовательно, достаточные условия для задачи (6.2) заключаются в выполнении следующих соотношений:

$$\alpha C_i \beta_{ij} \prod_{k=1}^n y_{-ik}^{\beta_{ik}} = p_j y_{-ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (6.3)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{-ji} \in [0, b_i], \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.4)$$

Заметим, что соотношения (6.3) эквивалентны

$$y_{-ij} = \frac{p_1 \beta_{ij}}{p_j \beta_{i1}} y_{-i1}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.3), получим решение задачи (6.2):

$$y_{-ij}^* = \frac{\beta_{ij}}{p_j} \left(\frac{\alpha C_i \prod_{k=1}^n \beta_{ik}^{\beta_{ik}}}{\prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{ik}}} \right)^{\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \beta_{ik}}}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

¹ C_i — коэффициенты нейтрального технического прогресса, β_{ij} — коэффициенты эластичности по ресурсам.

Заметим, что при сделанных предположениях $\sum_{j=1}^n y_{ji}^* \in [0, b_i]$, $i = \overline{1, n}$. Действительно,

$$0 < \sum_{j=1}^n \frac{\beta_{ji}}{p_i} \left(\frac{\alpha C_j \prod_{k=1}^n \beta_{jk}^{\beta_{jk}}}{\prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{jk}}} \right)^{\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \beta_{jk}}} < \sum_{j=1}^n C_j^{\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \beta_{jk}}} \leq b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, функция предложения $S_i: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ i -го товара определяется по формулам:

$$\begin{aligned} S_i(p) &= P_i(y_{i1}^*, y_{i2}^*, \dots, y_{in}^*) = \sum_{j=1}^n y_{ji}^* \\ &= C_i \prod_{j=1}^n (y_{ij}^*)^{\beta_{ij}} = \sum_{j=1}^n y_{ji}^* \\ &= K_i \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{ik}} = p_i^{-1} \sum_{j=1}^n L_{ij} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{jk}}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{ijk} &= \frac{\beta_{jk}}{\sum_{l=1}^n \beta_{il} + 1}, \quad i, j, k = \overline{1, n}, \\ K_i &= \alpha^{\frac{\sum_{k=1}^n \beta_{ik}}{1 + \sum_{k=1}^n \beta_{ik}}} \left(C_i \prod_{k=1}^n \beta_{ik}^{\beta_{ik}} \right)^{\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \beta_{ik}}}, \quad i = \overline{1, n}, \\ L_{ij} &= \beta_{ji} \left(\alpha C_j \prod_{k=1}^n \beta_{jk}^{\beta_{jk}} \right)^{\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \beta_{ik}}}, \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Модель поведения потребителя. Функция спроса.

Перейдем к построению функции спроса потребителя. Пусть имеется потребитель с некоторым бюджетом $I > 0$. Задано множество $G \subseteq \mathbb{R}_+^n$ наборов товаров $x = (x_1, \dots, x_n)$, которые может приобрести потребитель. Будем считать также, что все товары обладают свойством произвольной делимости, т. е. может быть закуплено любое неотрицательное количество каждого из них.

Предположим, что потребительские предпочтения описываются функцией полезности U . Стоица. Пусть заданы числа $a_j > 0$, $\alpha_j \in (0, 1)$, $j = \overline{1, n}$. Положим $G = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_j > a_j, j = \overline{1, n}\}$ и определим функцию $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$u(x) = \prod_{j=1}^n (x_j - a_j)^{\alpha_j}.$$

Число a_j является минимально необходимым количеством j -го товара, которое приобретается в любом случае и не является предметом выбора, а коэффициенты α_j характеризуют относительную "ценность" товаров для потребителя. Будем считать, что $\sum_{j=1}^n p_j a_j < I$. В этих предположениях максимум функции полезности достигается лишь в том случае, когда бюджетное ограничение $\sum_{j=1}^n p_j x_j \leq I$ выполняется как точное равенство.

Итак, модель Стоуна имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x) = \prod_{j=1}^n (x_j - a_j)^{\alpha_j} \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j = I, \quad x_j > a_j, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для решения этой задачи максимизации применим принцип Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи (6.7) имеет вид

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{j=1}^n (x_j - a_j)^{\alpha_j} + \lambda \left(I - \sum_{j=1}^n p_j x_j \right).$$

В силу регулярности ограничений в задаче (6.7) необходимые условия оптимальности заключаются в существовании такого $\lambda \geq 0$, что выполнено

$$\begin{cases} \frac{\alpha_j \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i}}{x_j - a_j} - \lambda p_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i = I, \quad x_j > a_j, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6.8)$$

Поскольку функция полезности u является вогнутой, а ограничения в задаче (6.7) линейны, условия (6.8) являются достаточными условиями максимума. Таким образом, пара (x^*, λ^*) является решением системы (6.8) тогда и только тогда, когда x^* является решением задачи (6.7).

Система (6.8) эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} x_j = a_j + \frac{\alpha_j \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i}}{\lambda p_j}, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i = I, \quad x_j > a_j, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Следовательно, решение системы (6.8), а значит и задачи (6.7), имеет вид

$$x_i^* = a_i + \frac{\alpha_i \left(I - \sum_{j=1}^n p_j a_j \right)}{p_i \sum_{j=1}^n \alpha_j}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, для любого $i = \overline{1, n}$ функция спроса на i -й товар $D_i: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеет вид

$$D_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = a_i + \frac{\alpha_i \left(I - \sum_{j=1}^n p_j a_j \right)}{p_i \sum_{j=1}^n \alpha_j}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n. \quad (6.9)$$

Заметим, что функции D_i определены для тех $p \in \mathbb{R}_+^n$, для которых $\sum_{j=1}^n p_j a_j < I$. Для прочих $p \in \mathbb{R}_+^n$ мы доопределяем функции D_i формулой (6.9).

Существование положения равновесия. Пусть заданы действительное число $I > 0$, векторы $a = (a_1, \dots, a_n)$, $C = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и квадратная матрица B порядка n с компонентами $\beta_{ij} > 0$, $i, j = \overline{1, n}$, такая, что $\sum_{j=1}^n \beta_{ij} < 1 \quad \forall i = \overline{1, n}$. Пусть, кроме того, заданы векторы $c_1 = (c_{11}, \dots, c_{n1})$, $c_2 = (c_{12}, \dots, c_{n2}) \in \mathbb{R}_+^n$, причем $c_{i1} < c_{i2}$, $c_{i2} - c_{i1} = a_i$, $i = \overline{1, n}$. Для произвольных векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $\langle x, \bar{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i$.

Под математической моделью рынка будем понимать набор

$$\sigma = (I, a, C, B, c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^{n^2} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n.$$

Множество всех наборов $\sigma = (I, a, C, B, c_1, c_2)$, удовлетворяющих указанным выше предположениям, обозначим через $\mathcal{M}$. Очевидно, что множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_+^{2+4n+1}$ открыто.

Набор параметров (I, a, C, B) однозначно определяет функцию предложения $S: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ по формуле (6.6) и функцию спроса $D: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ по формуле (6.9).

Компоненты векторов c_1, c_2 определяют естественные ограничения цен p_i на i -й товар, т. е. будем предполагать, что $c_{i1} \leq p_i \leq c_{i2}$ для каждого $i = \overline{1, n}$.

Множество $D(p)$ называется совокупным спросом, соответствующим вектору цен p , а вектор $S(p)$ называется совокупным предложением, соответствующим вектору цен p . Существование состояния равновесия в исследуемой модели эквивалентно выполнению равенства $S(p) = D(p)$.

Положим

$$\begin{aligned} \alpha(\sigma) &= \min_{i=\overline{1, n}} \left| c_{i2}^{-1} \sum_{j=1}^n I_{ij} \prod_{k=1}^n c_{k2}^{\beta_{ijk}} (c_{i2} - c_{i1}) / 2 \right| - \\ &= \max_{i=\overline{1, n}} \left(\sum_{l,j=1}^n I_{ij} \bar{\beta}_{ijl} \prod_{k=1}^n c_{k2}^{\beta_{ijk}} \frac{c_{l2} - c_{l1}}{2c_{i2}c_{l2}} \right) - \\ &= \max_{i=\overline{1, n}} \left(K_i \prod_{k=1}^n c_{k2}^{\beta_{iik}} \sum_{l=1}^n \beta_{iil} \frac{c_{l2} - c_{l1}}{2c_{l2}} \right), \\ \beta(\sigma) &= \max_{i=\overline{1, n}} \left(2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^{-1} \left[\frac{\alpha_i}{c_{i1}^2} (I - \langle c_1, a \rangle + c_{i1} a_i) (c_{i2} - c_{i1}) + \frac{\alpha_i}{c_{i1}} (\langle a, c_2 - c_1 \rangle - a_i (c_{i2} - c_{i1})) \right], \\ \gamma(\sigma) &= \max_{i=\overline{1, n}} \left| a_i + \frac{\alpha_i (2I - \langle a, c_2 + c_1 \rangle)}{(c_{i2} + c_{i1}) \sum_{j=1}^n \alpha_j} + \frac{2}{c_{i2} + c_{i1}} \sum_{j=1}^n I_{ij} \prod_{k=1}^n \left(\frac{c_{k2} + c_{k1}}{2} \right)^{\beta_{ijk}} - \right. \\ &\quad \left. - K_i \prod_{k=1}^n \left(\frac{c_{k2} + c_{k1}}{2} \right)^{\beta_{iik}} \right|. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть модель $\sigma \in \mathcal{M}$ удовлетворяет условиям

- 1) $\alpha(\sigma) > \beta(\sigma)$;
- 2) $\gamma(\sigma) < \alpha(\sigma) - \beta(\sigma)$.

Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен $p = (p_1, \dots, p_n)$ такой, что $c_{i1} < p_i < c_{i2}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим нормы по формулам

$$\|x\|_1 = 2 \max_{i=\overline{1, n}} \frac{|x_i|}{c_{i2} - c_{i1}} \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\|_2 = \max_{i=1,n} |x_i| \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_1) и (Y, ρ_2) , где $X = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) | \alpha \in [0; 1] : c_i = \alpha c_{i1} + (1 - \alpha) c_{i2}\}$, $Y = \mathbb{R}_+^n$, метрика ρ_1 определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_2 — нормой $\|\cdot\|_2$.

Положим

$$\tilde{c} = \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad M = B_X(\tilde{c}, 1).$$

Заметим, что метрическое пространство X не является полным, однако для дальнейших рассуждений достаточно полноты пары $B_X(\tilde{c}, 1)$.

Оценим константу накрывания отображения S . Для любого $p \in \text{int} M$ имеем

$$\frac{\partial S}{\partial p}(p) = \mathcal{L}_1(p) - \mathcal{L}_2(p) - \mathcal{K}(p),$$

где $\mathcal{L}_1(p)$, $\mathcal{L}_2(p)$, $\mathcal{K}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейные операторы, определенные матрицами

$$\mathcal{L}_1(p) = \begin{pmatrix} p_1^{-2} \sum_{j=1}^n L_{1j} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{1jk}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2^{-2} \sum_{j=1}^n L_{2j} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{2jk}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n^{-2} \sum_{j=1}^n L_{nj} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{nj k}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_2(p) = \begin{pmatrix} p_1^{-2} \sum_{j=1}^n L_{1j} \bar{\beta}_{1j1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{1jk}} & \dots & p_1^{-1} p_n^{-1} \sum_{j=1}^n L_{1j} \bar{\beta}_{1jn} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{1jk}} \\ p_2^{-1} p_1^{-1} \sum_{j=1}^n L_{2j} \bar{\beta}_{2j1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{2jk}} & \dots & p_2^{-1} p_n^{-1} \sum_{j=1}^n L_{2j} \bar{\beta}_{2jn} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{2jk}} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n^{-1} p_1^{-1} \sum_{j=1}^n L_{nj} \bar{\beta}_{nj1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{nj k}} & \dots & p_n^{-2} \sum_{j=1}^n L_{nj} \bar{\beta}_{njn} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{nj k}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}(p) = \begin{pmatrix} K_1 \beta_{111} p_1^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{11k}} & K_1 \beta_{112} p_2^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{11k}} & \dots & K_1 \beta_{11n} p_n^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{11k}} \\ K_2 \beta_{221} p_1^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{22k}} & K_2 \beta_{222} p_2^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{22k}} & \dots & K_2 \beta_{22n} p_n^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{22k}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_n \beta_{nn1} p_1^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{nnk}} & K_n \beta_{nn2} p_2^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{nnk}} & \dots & K_n \beta_{nnn} p_n^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{nnk}} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, согласно приведенной выше теореме о возмущении,

$$\text{cov}\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right) \geq \text{cov}(\mathcal{L}_1(p)) - \|\mathcal{L}_2(p)\| - \|\mathcal{K}(p)\|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathcal{L}_1(p)) &= \min_{i=1,n} \left| p_i^{-1} \sum_{j=1}^n L_{ij} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{ijk}} (c_{i2} - c_{i1})/2 \right| \geq \\ &\geq \min_{i=1,n} \left| c_{i2}^{-1} \sum_{j=1}^n L_{ij} \prod_{k=1}^n p_{c2}^{\beta_{ijk}} (c_{i2} - c_{i1})/2 \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{L}_2(p)\| = \max_{\|x\|_1} \|\mathcal{L}_2(p)x\|_2 \\
& = \max_{\|x\|_1} \max_{i=1, n} \left| \sum_{l=1}^n p_i^{-1} p_l^{-1} \sum_{j=1}^n L_{ij} \beta_{ijl} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{ijk}} x_l \right| \leq \\
& \leq \max_{\|x\|_1} \max_{i=1, n} \left(\sum_{l=1}^n p_i^{-1} p_l^{-1} \sum_{j=1}^n L_{ij} \bar{\beta}_{ijl} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{ijk}} |x_l| \right) \leq \\
& \leq \max_{i=1, n} \left(\sum_{l,j=1}^n L_{ij} \beta_{ijl} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{ijk}} \frac{c_{l2} - c_{l1}}{2p_i p_l} \right), \\
& \|\mathcal{K}(p)\| = \max_{\|x\|_1} \|\mathcal{K}(p)x\|_2 \\
& = \max_{\|x\|_1} \max_{i=1, n} \left| \sum_{l=1}^n K_i \beta_{iil} p_l^{-1} \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{iik}} x_l \right| \leq \\
& \leq \max_{\|x\|_1} \max_{i=1, n} \left(K_i \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{iik}} \sum_{l=1}^n \beta_{iil} \frac{|x_l|}{p_l} \right) \leq \\
& \leq \max_{i=1, n} \left(K_i \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_{iik}} \sum_{l=1}^n \bar{\beta}_{iil} \frac{c_{l2} - c_{l1}}{2p_l} \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) & \geq \min_{i=1, n} \left| c_{i2}^{-1} \sum_{j=1}^n L_{ij} \prod_{k=1}^n c_{k2}^{\beta_{ijk}} (c_{i2} - c_{i1}) / 2 \right| - \\
& - \max_{i=1, n} \left(\sum_{l,j=1}^n L_{ij} \beta_{ijl} \prod_{k=1}^n c_{k2}^{\beta_{ijk}} \frac{c_{l2} - c_{l1}}{2c_{i2}c_{l2}} \right) - \\
& - \max_{i=1, n} \left(K_i \prod_{k=1}^n c_{k2}^{\beta_{iik}} \sum_{l=1}^n \bar{\beta}_{iil} \frac{c_{l2} - c_{l1}}{2c_{l2}} \right).
\end{aligned}$$

Из теоремы 4 из [2] следует, что

$$\text{cov}(S|M) = \inf_{p \in \text{int} M} \text{cov}(S|p) \geq \bar{\alpha}(\sigma).$$

Оценим теперь константу Липшица отображения D . Для любого $p \in \text{int} M$ имеем

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \begin{cases} -\alpha_i a_j \left(p_i \sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^{-1}, & \text{при } i \neq j; \\ -\alpha_i \left(I - \sum_{k=1, n, k \neq i} p_k a_k \right) \left(p_i^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^{-1}, & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| \leq \frac{\max_{i=1, n} \left[\frac{\alpha_i}{p_i^2} \left(I - \sum_{k=1, n, k \neq i} p_k a_k \right) (c_{i2} - c_{i1}) + \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{j=1, n, j \neq i} a_j (c_{j2} - c_{j1}) \right]}{2 \sum_{k=1}^n \alpha_k} \leq$$

$$\leq \frac{\max_{i=\overline{1,n}} \left[\frac{\alpha_i}{c_{i1}^2} \left(1 - \sum_{k=\overline{1,n}, k \neq i} c_{k1} a_k \right) (c_{i2} - c_{i1}) + \frac{\alpha_i}{c_{i1}} \sum_{j=\overline{1,n}, j \neq i} a_j (c_{j2} - c_{j1}) \right]}{2 \sum_{k=1}^n \alpha_k} \beta(\sigma)$$

для любого $p \in \text{int} M$. Следовательно, $\text{lip}(D|M) \leq \beta(\sigma)$.

Из предположений 1) и 2) теоремы и неравенств $\text{cov}(S|M) \geq \bar{\alpha}(\sigma)$, $\text{lip}(D|M) \leq \bar{\beta}(\sigma)$ следует, что существуют положительные числа α и β такие, что $\bar{\beta}(\sigma) < \beta < \alpha < \bar{\alpha}(\sigma)$, $\bar{\gamma}(\sigma) < \alpha - \beta$, отображение S является α -накрывающим на множестве M , а отображение D является β -лишниековым на множестве M . Поскольку $\rho_Y(S(\bar{c}), D(\bar{c})) = \gamma(\sigma)$, из предположения 2) теоремы следует, что $\rho_Y(S(\bar{c}), D(\bar{c})) \leq (\alpha - \beta)$. Таким образом, существует вектор $p \in X$ такой, что $S(p) = D(p)$ и

$$\rho_X(p, \bar{c}) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \rho_Y(S(\bar{c}), D(\bar{c})).$$

Из последнего неравенства следует, что $p \in \text{int} M$, поскольку $M = B_X(\bar{c}, 1)$, а $\rho_Y(S(\bar{c}), D(\bar{c})) = \gamma(\sigma) < (\alpha - \beta)$. Поэтому $c_{j1} < p_j < c_{j2}$ для любого $j = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
2. Arutyunov A., Arakov E., Gel'man B., Dnitrak A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P. 5–16.
3. Арутюнов А.В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Мат. заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 163–169.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-31140).

Поступила в редакцию 21 ноября 2013 г.

Bolotin A.E., Pavlova N.G.

APPLICATION OF COVERING MAPPING THEORY TO ARROW-DEBREU MODEL WITH TRANSACTIONS COSTS

The existence of the equilibrium in Arrow–Debreu model with transactions costs is studied. The model under discussion, the demand function is obtained as a solution of the utility function maximization problem and the supply function obtained as a solution of the problem maximization under the budget restrictions. Sufficient conditions for existence of the equilibrium price-vector are obtained. This result is obtained as corollaries of theorems from covering mappings theory.

Key words: coincidence points; α -covering mappings; demand function; supply function; equilibrium price-vector.

Болотин Артем Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: artem-bolotin@yandex.ru

Bolotin Artem Evgenievich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Postgraduate student of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: artem-bolotin@yandex.ru

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: natasharussia@mail.ru

Pavlova Natal'ya Gennad'evna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: natasharussia@mail.ru